RADIATIONS. — *Ondes et quanta* (1).
Note de M. **Louis de Broglie**.

Considérons un mobile matériel de masse propre m_0 se mouvant par rapport à un observateur fixe avec une vitesse $v = \beta c$ ($\beta < 1$). D'après le principe de l'inertie de l'énergie, il doit posséder une énergie interne égale à $m_0 c^2$. D'autre part, le principe des quanta conduit à attribuer cette énergie interne à un phénomène périodique simple de fréquence ν_0 telle que

$$h\nu_0 = m_0 c^2,$$

c étant toujours la vitesse limite de la théorie de relativité et h la constante de Planck.

Pour l'observateur fixe, à l'énergie totale du mobile correspondra une fréquence $\nu = \frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}\cdot$ Mais, si cet observateur fixe observe le phénomène périodique interne du mobile, il le verra ralenti et lui attribuera une fréquence $\nu_1 = \nu_0\sqrt{1-\beta^2}$; pour lui, ce phénomène varie donc comme

$$\sin 2\pi\nu_1 t.$$

Supposons maintenant qu'au temps $t = 0$, le mobile coïncide dans l'espace avec une onde de fréquence ν ci-dessus définie se propageant dans la même direction que lui avec la vitesse $\frac{c}{\beta}\cdot$ Cette onde de vitesse plus grande que c ne peut correspondre à un transport d'énergie; nous la considérerons seulement comme une onde fictive associée au mouvement du mobile.

Je dis que, si au temps $t = 0$, il y a accord de phase entre les vecteurs de l'onde et le phénomène interne du mobile, cet accord de phase subsistera. En effet, au temps t le mobile est à une distance de l'origine égale à $vt = x$; son mouvement interne est alors représenté par $\sin 2\pi\nu_1 \frac{x}{v}\cdot$

(1) Au sujet de la présente Note, voir M. Brillouin, *Comptes rendus*, t. 168, 1919, p. 1318.

L'onde, en ce point, est représentée par

$$\sin 2\pi\nu\left(t - \frac{x\beta}{c}\right) = \sin 2\pi\nu x\left(\frac{1}{v} - \frac{\beta}{c}\right).$$

Les deux sinus sont égaux, l'accord de phase est réalisé si l'on a

$$\nu_1 = \nu(1 - \beta^2),$$

condition évidemment satisfaite par les définitions de ν et ν_1.

La démonstration de cet important résultat repose uniquement sur le principe de relativité restreinte et sur l'exactitude de la relation des quanta tant pour l'observateur fixe que pour l'observateur entraîné.

Appliquons d'abord ceci à un atome de lumière. J'ai montré ailleurs [1] que l'atome de lumière doit être considéré comme un mobile de masse très petite ($< 10^{-50}$ gr.) se mouvant avec une vitesse très sensiblement égale à c (bien que légèrement inférieure). Nous arrivons donc à l'énoncé suivant : « *L'atome de lumière équivalent en raison de son énergie totale à une radiation de fréquence* ν *est le siège d'un phénomène périodique interne qui, vu par l'observateur fixe, a en chaque point de l'espace même phase qu'une onde de frequence* ν *se propageant dans la même direction avec une vitesse sensiblement égale (quoique très légèrement supérieure) à la constante dite vitesse de la lumière.* »

Passons maintenant au cas d'un électron décrivant d'une vitesse uniforme sensiblement inférieure à c une trajectoire fermée. Au temps $t = 0$, le mobile est en un point O. L'onde fictive associée, partant alors de O et décrivant toute la trajectoire avec la vitesse $\frac{c}{\beta}$, rattrape l'électron au temps τ en un point O′ tel que $\overline{OO'} = \beta c\tau$.

On a donc

$$\tau = \frac{\beta}{c}[\beta c(\tau + T_r)] \qquad \text{ou} \qquad \tau = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2} T_r,$$

où T_r est la période de révolution de l'électron sur son orbite. La phase interne de l'électron, quand celui-ci va de O en O′, varie de

$$2\pi\nu_1\tau = 2\pi \frac{m_0 c^2}{h} T_r \frac{\beta^2}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Il est *presque nécessaire* de supposer que la trajectoire de l'électron n'est stable *que si* l'onde fictive passant en O′ retrouve l'électron en phase avec

---

[1] Voir *Journal de Physique*, 6e série, t. 3, 1922, p. 422.

elle : l'onde de fréquence ν et de vitesse $\frac{c}{\beta}$ doit être en résonance sur la longueur de la trajectoire. Ceci conduit à la condition

$$\frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} T_r = nh, \qquad n \text{ étant entier.}$$

Montrons que cette condition de stabilité est bien celle des théories de Bohr et Sommerfeld pour une trajectoire décrite à vitesse constante. Appelons p_x, p_y, p_z les quantités de mouvement de l'électron suivant trois axes rectangulaires. La condition générale de stabilité énoncée par Einstein est en effet

$$\int_0^{T_r} (p_x\,dx + p_y\,dy + p_z\,dz) = nh \qquad (n \text{ entier}) \text{ (1)},$$

ce qui peut dans le cas présent s'écrire

$$\int_0^{T_r} \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\,dt = \frac{m_0 \beta^2 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} T_r = nh,$$

comme ci-dessus.

Dans le cas d'un électron tournant avec une vitesse angulaire ω sur un cercle de rayon R, on retrouve pour les vitesses assez petites la formule primitive de Bohr : $m_0 \omega R^2 = n \frac{h}{2\pi}$.

Si la vitesse varie le long de la trajectoire, on retrouve encore la formule de Bohr-Einstein si β est petit. Si β prend de grandes valeurs, la question devient plus compliquée et nécessitera un examen spécial.

Poursuivant dans la même voie, nous sommes parvenus à des résultats importants qui seront prochainement communiqués. Nous sommes dès aujourd'hui en mesure d'expliquer les phénomènes de diffraction et d'interférences en tenant compte des quanta de lumière.

---

(1) Le cas des mouvements quasi périodiques ne présente aucune difficulté nouvelle. La nécessité de satisfaire à la condition énoncée au texte pour une infinité de pseudo-périodes conduit aux conditions de Sommerfeld.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. **177**, p. 507, séance du 10 septembre 1923.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
71206-23 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

1923 24-9

Inv. n° 2269

OPTIQUE. — *Quanta de lumière, diffraction et interférences.* Note de M. **Louis de Broglie**.

1. Dans une Note récente [1], nous avons montré qu'un observateur, pour décrire le mouvement d'un mobile de vitesse βc ($\beta < 1$), doit lui associer une onde sinusoïdale *non matérielle* se propageant dans la même direction avec une vitesse $\frac{c}{\beta} = \frac{c^2}{v}$; la fréquence de cette onde est égale à l'énergie totale, par rapport à l'observateur, du mobile considéré, divisée par la constante h de Planck. On peut du reste considérer la vitesse βc comme la « vitesse de groupe » d'ondes ayant des vitesses $\frac{c}{\beta}$ et des fréquences $\frac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$, correspondant à des valeurs de β voisines mais légèrement différentes. Laissant de côté la signification physique de cette onde (ce sera la tâche difficile d'un électromagnétisme élargi de l'expliquer), nous rappelons que le mobile a même phase interne que la portion de l'onde située au même point; nous l'appellerons donc « l'onde de phase ».

Les atomes de lumière dont nous admettons l'existence ne se propagent pas toujours en ligne droite, comme le prouvent les phénomènes de diffraction. Il semble donc *nécessaire* de modifier le principe de l'inertie. Nous proposons de mettre à la base de la dynamique du point matériel libre le postulat suivant : « En chaque point de sa trajectoire, un mobile libre suit d'un mouvement uniforme le *rayon* de son onde de phase, c'est-à-dire (dans un milieu isotrope) la normale aux surfaces d'égale phase ». En général, le mobile suivra donc la trajectoire rectiligne fixée par le principe de Fermat appliqué à l'onde de phase, qui se confond ici avec le principe de moindre action appliqué au mobile sous la forme maupertuisienne. Mais si le mobile doit traverser une ouverture dont les dimensions sont petites par rapport à la longueur d'onde de l'onde de phase, sa trajectoire se courbera en général comme le rayon de l'onde diffractée. La conservation de l'énergie est sauve,

[1] *Comptes rendus*, t. 177, 1923, p. 507. J'ai fait dans cette Note une restriction inutile : on retrouve les conditions de Bohr même dans le cas des vitesses variables très élevées.

mais non celle de la quantité de mouvement, à moins qu'il ne se transmette une pression aux atomes matériels formant le bord de l'ouverture.

Le nouveau principe mis à la base de la dynamique expliquerait la diffraction des atomes de lumière, *si petit que soit leur nombre*. De plus un mobile quelconque pourrait dans certains cas se diffracter. Un flot d'électrons traversant une ouverture assez petite présenterait des phénomènes de diffraction. C'est de ce côté qu'il faudra peut-être chercher des confirmations expérimentales de nos idées.

Nous concevons donc l'onde de phase comme guidant les déplacements de l'énergie, et c'est ce qui peut permettre la synthèse des ondulations et des quanta. La théorie des ondes allait trop loin en niant la structure discontinue de l'énergie radiante et pas assez loin en renonçant à intervenir dans la dynamique. *La nouvelle dynamique du point matériel libre est à l'ancienne dynamique* (*y compris celle d'Einstein*) *ce que l'optique ondulatoire est à l'optique géométrique*. En y réfléchissant on verra que la synthèse proposée paraît le couronnement logique du développement comparé de la dynamique et de l'optique depuis le XVII[e] siècle.

II. Arrivons maintenant à l'explication des franges d'interférences. Nous admettrons qu'un atome matériel a une probabilité d'absorber ou d'émettre un atome de lumière déterminée par la résultante de l'un des vecteurs des ondes de phase se croisant sur lui ; naturellement l'émission n'est possible que si l'atome est excité et l'absorption que si un atome de lumière se trouve à proximité. L'hypothèse précédente est au fond tout à fait analogue à celle qu'admet la théorie électromagnétique quand elle lie l'intensité de la lumière *décelable* (c'est-à-dire capable d'agir photoélectriquement sur l'œil, la plaque photographique ou le bolomètre) à l'intensité du vecteur électrique résultant.

Une cause quelconque ayant déclenché l'émission d'un quantum de lumière dans une source « ponctuelle », son onde de phase, en passant sur les atomes voisins, déclenchera d'autres émissions de quanta dont nous supposerons la vibration interne en phase avec l'onde elle-même. Tous les atomes lumineux émis auraient donc ainsi même onde de phase que le premier; nous dirons qu'ils sont couplés en onde ([1]). L'onde de phase unique transporte donc avec elle une foule de petits morceaux d'énergie qui

---

([1]) Ce sont probablement de tels atomes couplés en onde qui interviennent dans la formule des fluctuations du rayonnement noir. Voir *Comptes rendus*, t. 175, 1922, p. 811.

glissent d'ailleurs un peu à sa surface comme il résulte de notre dernière Note.

Étudions l'expérience des trous d'Young : quelques atomes de lumière traverseront les trous et se diffracteront en suivant le rayon de la portion d'onde de phase qui les entoure. Dans l'espace situé derrière la paroi, leur capacité d'agir photoélectriquement variera en chaque point suivant l'état d'interférence des ondes de phase qui ont traversé en se diffractant les deux trous. Il y aura donc des franges brillantes et obscures telles que les prévoient les théories ondulatoires et *cela si faible que soit l'intensité de la lumière incidente*.

Ce système d'explication, qui emprunte l'essentiel à la théorie des ondes en introduisant les quanta, doit se généraliser pour toutes les franges d'interférence et de diffraction.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*
t. 177, p. 548, séance du 24 septembre 1923.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
71277-23 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.

PHYSIQUE. — *Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat.* Note de M. **Louis de Broglie**.

I. Planck et Nernst ont montré que l'idée de quantum devait être introduite dans la théorie cinétique des gaz, en vue de calculer les constantes d'entropie et les constantes chimiques dont l'importance est si grande en thermodynamique. Dans ce but, Planck a été amené à choisir un élément d'extension en phase égal

$$\frac{1}{h^3}\,dx\,dy\,dz\,dp\,dq\,dr = \frac{4\pi}{h^3}\,m_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2w}\,dw\,dx\,dy\,dz,$$

où x, y, z, p, q, r sont les coordonnées et les quantités de mouvement de l'atome, m_0 sa masse propre, w son énergie cinétique, h la constante d'action. Nous sommes aujourd'hui en mesure de justifier cette hypothèse.

Chaque atome de vitesse βc peut être considéré comme lié à un groupe d'ondes dont les vitesses de phase sont $V = \frac{c}{\beta}$, les fréquences $\frac{1}{h}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, et la vitesse de groupe $U = \beta c$. L'état du gaz ne pourra donc être stable que si les ondes correspondant à tous les atomes forment un système d'ondes stationnaires; suivant une méthode connue donnée par Jeans, on trouve pour le nombre des ondes stationnaires contenues dans l'unité de volume et dont les fréquences sont comprises entre ν et $\nu + d\nu$:

$$n_\nu\,d\nu = \frac{4\pi}{UV^2}\,\nu^2\,d\nu = \frac{4\pi}{c^3}\,\beta\nu^2\,d\nu.$$

Les quantités ν et w sont reliées par la relation

$$h\nu = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = w + m_0 c^2 = m_0 c^2(1+\alpha) \qquad \left(\alpha = \frac{w}{m_0 c^2}\right),$$

d'où

$$n_\nu\,d\nu = \frac{4\pi}{h^3}\,m_0^2\,c(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\,dw.$$

Chaque onde peut transporter zéro, un, deux ou plusieurs atomes, de telle sorte que, d'après la loi de distribution canonique, le nombre des atomes d'énergie totale $h\nu$ dans l'élément de volume est

$$\text{const.}\,\frac{4\pi}{h^3}\,m_0^2\,c(1+\alpha)\sqrt{\alpha(\alpha+2)}\,dw\,dx\,dy\,dz\,\frac{\sum_1^\infty n\,e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}.$$

Considérons d'abord un gaz matériel dont les atomes ont une masse relativement grande et, par suite, des vitesses relativement petites. Nous pouvons négliger tous les termes de la série, excepté le premier, et poser

$$1+\alpha=1.$$

Le nombre d'atomes d'énergie cinétique w est donc

$$\text{const.}\,\frac{4\pi}{h^3}\,m_0^{\frac{3}{2}}\sqrt{2w}\,dw\,dx\,dy\,dz\,e^{-\frac{w}{kT}},$$

résultat qui justifie la méthode de Planck et conduit à la forme usuelle de la loi de Maxwell.

Dans le cas d'un gaz formé d'atomes de lumière, α est toujours grand et nous devons employer toute la série. En raison de la symétrie binaire interne imposée par l'analogie ondulatoire, nous devons introduire un facteur 2 et la méthode esquissée dans notre article du *Journal de Physique* de novembre 1922 conduit à la loi de Planck pour la densité d'énergie :

$$\rho_\nu\,d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3\sum_1^\infty e^{-n\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu=\frac{8\pi h}{c^3}\,\nu^3\,\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\,d\nu.$$

II. Cherchons à préciser les idées exposées dans nos Notes précédentes. Si, dans un certain milieu, un corps décrit une trajectoire courbe, nous disons qu'il y existe un champ de force et en chaque point le principe de l'énergie permet de déduire la vitesse du corps de la valeur constante de son énergie totale. Pour assurer l'accord de phase entre l'onde et le mobile, on est conduit à supposer que l'onde de phase d'un mobile d'énergie totale donnée a en chaque point une fréquence et une vitesse fixée par la valeur qu'aurait la vitesse du corps s'il se trouvait en ce point. Sans doute, une théorie électromagnétique élargie nous donnera le mécanisme de cette propagation complexe. Il semble que nous connaissions par avance sa conclusion principale : « Les rayons des ondes de phase coïncident avec les trajectoires dynamiquement possibles. » En effet, les rayons se calculeront comme dans un milieu de dispersion variable par le principe de Fermat, qui s'écrit ici

$$\delta \int \frac{\nu\, ds}{V} = \delta \int \frac{m_0 \beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}}\, ds = 0,$$

alors que le principe de moindre action sous la forme Maupertuisienne détermine les trajectoires par l'équation

$$\delta \int m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \sqrt{1-\beta^2} \right) dt = \delta \int \frac{m.\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}\, ds = 0.$$

Le lien fondamental qui unit les deux grands principes de l'Optique géométrique et de la Dynamique est mis ainsi en pleine lumière. Parmi les trajectoires dynamiquement possibles, certaines jouiront de la propriété particulière d'être en résonance avec l'onde de phase; ce sont les trajectoires stables de Bohr pour lesquelles $\int \frac{\nu ds}{V}$ est un nombre entier.

Remarquons que l'intégrale de Fermat fait intervenir le produit d'une fréquence par un temps et l'action ne s'introduit que par suite de la proportionnalité de l'énergie et de la fréquence. Cette proportionnalité reste un postulat dont le sens physique n'est pas éclairci; elle constitue sans doute un des aspects de la liaison de l'espace et du temps et, comme notre expérience usuelle nous a habitué à dissocier ces deux notions, elle garde un caractère très peu intuitif.

(Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. 177, p. 630, séance du 8 octobre 1923.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
71360-23 Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.